بهبود روش انتقال پایدار برای تحلیل قابلیت اعتماد مرتبهٔ اول*

(یادداشت پژوهشی)

بهروز کشته‌گر(۱)

چکیده *روش انتقال پایدار یک روش ساده و مؤثر در کنترل ناپایدار عددی روش قابلیت اعتماد مرتبه اول (FORM) برمبنای تئوری کنترل اغتشاشات می‌باشد. کارایی و قدرتمندی روش انتقال پایدار وابسته به انتخاب پارامترهای آن است که شامل ماتریس اجباری و طول گام در تحلیل قابلیت اعتماد می‌باشد. با انتخاب نامناسب طول گام و ماتریس اجباری رویهٔ تکرار انتقال پایدار ممکن است واگرا، همگرایی نامطلوب و یا همگرایی کندی داشته باشد. در این مقاله رویهٔ انتقال پایدار با پیشنهاد یک طول گام دینامیکی ساده و ماتریس اجباری برابر واحد بهبود بخشیده شده است. طول گام پیشنهادی برمبنای اطلاعات تکرار مراحل جدید و قبلی روش FORM به‌طور دینامیکی قابل محاسبه است. کارایی و همگرایی روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار با روش انتقال پایدار و طول گام بی‌نهایت به‌کمک پنج مثال عددی و مکانیکی برگرفته از مراجع مقایسه گردیده است. نتایج حاکی از آن است که روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار نه‌تنها پایداری عددی مسائل غیرخطی قابلیت اعتماد را تضمین می‌کند بلکه کارایی بیشتری نسبت به روش انتقال پایدارجهت تخمین احتمال خرابی دارد.*

واژه‌های کلیدی روش قابلیت اعتماد مرتبهٔ اول; روش انتقال پایدار; طول گام دینامیکی.

.

Improvement of Stability Transformation Method for First Order Reliability Analysis

B. Keshtegar

Abstract *The stability transformation method (STM) of chaos feedback control is a simple and efficient approach to implement the convergence control of the first order reliability method (FORM). The robustness and efficiency of the STM are depended on selected parameters of this algorithm such that involuntary matrix and step size in structural reliability analysis. When involuntary matrix and step size are inappropriately selected, the STM iterative formula can be prematurely and slowly converged. In this paper, the STM scheme was improved based on a simple dynamical step size and the involuntary matrix equals to unit matrix. The proposed dynamical step size can be computed using the new and previous results of the FORM iterative formula. The efficiency and robustness of improved STM was compared with the STM and finite-step length methods from five numerical and mechanical examples taken through the literature. The results impales that the improved STM not only ensured the numerical stability of nonlinear mechanical problems but also is more efficient than the STM to approximate the failure probability.*

Key Words First order reliability method; stability transformation method; dynamical step size.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۱۰/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۴/۷/۲۰ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i2.42636

(۱) استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه زابل. bkeshtegar@uoz.ac.ie

مقدمه

انواع عدم قطعیت در مقدار بار وارد، هندسه و خـواص مصالح به‌کمـک تحلیـل احتمـالاتی اجـزای سـازه‌ای و مکانیکی قابل درنظر گرفتن اسـت. تـلاش اساسـی در تحلیـل اولـین مرتبـهٔ قابلیـت اعتمـاد (First Order Reliability Method (FORM)) محاسبهٔ شاخص قابلیـت اعتماد (Reliability index) (β) می‌باشـد کـه براسـاس حداقل فاصله بین سطح خرابی و مبدهٔ در فضای نرمال استاندارد تعریف می‌گردد [1, 2] که می‌تواند مشابه یک مسئلهٔ بهینه‌سازی رابطه‌سازی گردد [3]:

$$\begin{aligned} &min\ \ \beta = \left|U\right| = \sqrt{U^T.U} \\ &s.t.\ \ \ g(U) = 0 \end{aligned} \qquad (۱)$$

باتوجـه بـه مسـئلهٔ فـوق، نیازمنـد الگـوریتم‌هـای مناسب بهینه‌سازی برای تحلیل مسـائل قابلیـت اعتمـاد هستیم. از این‌رو الگوریتم‌های مبتنی بـر تکـرار توسـط محققان مختلف ارائـه و معرفـی شـده‌انـد [9-2]. یـک روش تکراری توسط هاسفر و لیند [1] ابداع شده است که بعدها توسط رکویتر و فسـلر [4] بـا حفـظ ماهیـت تابع توزیع متغیرهای تصادفی غیرنرمال در فضای نرمال بهبود بخشیده شد که به نام HL-RF معـروف اسـت و کاربرد زیادی در مسائل قابلیت اعتماد دارد [3]. چندین روش بهینـه‌سـازی از جملـه گرادیـان، روش ضـرایب لاگرانژ، روش برنامه‌ریزی غیرخطـی بـه‌منظـور تعیـین شاخص قابلیت اعتماد توسط لیـو و Der Kiureghian مقایسه شد [5]. هم‌چنین آنها به‌کمک یک تابع شایسته (Merit function) بـه‌منظـور نمـایش همگرایـی روش HL-RF ، این الگوریتم را بهبـود بخشـیدند [5]. رویـهٔ بهبودیافته HL-RF [5] به‌کمک طـول گـام (size Step) انتخاب‌شده براساس قاعده آرمیجـو (Armijo) توسـط سانتوش و همکاران ارتقا یافت [6]. در مسـائل بسـیار غیرخطی قابلیت اعتماد روش‌هـای بهبودیافتـه HL-RF [5, 6] ممکن است به نقاط کمینه محلی همگرا گردنـد و یا این‌که نرخ هم‌گرایی پایینی داشته باشند [3, 7]. در سال‌های اخیر، یانگ الگـوریتم HL-RF را بااسـتفاده از روش انتقال پایدار مبتنی بر تئـوری اغتشاشـات بهبـود بخشیده اسـت [7] و بااسـتفاده از رویـهٔ انتقـال پایـدار (Stability Transformation Method (STM))، همگرایی رویهٔ HL-RF را تضمین نمودند. هـم‌چنـین، گنگ و یای براساس تعریف یک طول گام بزرگ، یـک الگوریتم تکرار قابلیت اعتماد پایه‌گـذاری نمودنـد [8]. انتخاب ضریب کنترل کوچک در رویهٔ انتقال پایـدار و هم‌چنین طول گام بزرگ الگوریتم مرجع [8]، منجر بـه دستیابی پاسخ پایدار با تعداد تکرار زیاد مـی‌گـردد. در سال ۲۰۱۳ کشته‌گر و میری، یـک رویـهٔ تعـدیل بـرای بهبود روش HL-RF پیشنهاد نمودند [9]. هم‌چنین آنها روش بهینه‌سازی گرادیان مزدوج برای تخمین شاخص قابلیت اعتماد را استفاده کردند [3,10]. محاسـبهٔ طـول گام و هـم‌چنـین بـردار امتـداد جسـتجو در الگـوریتم گرادیان مزدوج [3,10] نیاز به محاسبات پیچیده داشـته است اما نسبت به رویهٔ HL-RF توانمندتر و نسبت بـه رویهٔ انتقال پایدار کاراتر می‌باشد.

روش HL-RF در مســائل غیرخطــی و پیچیــدهٔ مهندسی، ممکن است دچار ناپایداری عددی از جملـه آشفتگی، دوشاخه‌ای شدن و نوسان گردد. روش انتقال پایدار برای فائق آمـدن بـر مشـکلات همگرایـی روش HL-RF بســط داده شــد [7]. روش انتقــال پایــدار برخلاف روش گرادیان مزدوج [3, 10] بـرای تخمـین بردار امتداد جستجو و طول گام نیـازی بـه محاسـبات پیچیـده نـدارد، امـا همگرایـی آن وابسـته بـه انتخـاب مناسب پارامترهایی مانند طول گام و مـاتریس اجبـاری دارد. به‌طوری‌که، با انتخاب نامناسب طـول گـام رویـهٔ تکرار ممکن است واگرایی و یا همگرایی کندی داشـته باشد. در این مقاله یک طول گام دینامیکی پیشنهاد شده اسـت کـه بـه‌سـادگی براسـاس متغیرهـای طراحـی تکرارهای جدید و قبلی قابل محاسبه است. توانمنـدی و کارایی رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقـال پایـدار بـا روش‌هـای

انتقال پایدار، روش طول گام بی‌نهایت [8]، HL-RF و گرادیان مزدوج [۱۰] با ذکر پنج مثال ریاضی غیرخطی و مکانیکی پیچیده بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار با تعداد تکرار بسیار کمتری نسبت به رویهٔ انتقال پایدار و طول گام بی‌نهایت همگرا شده است.

روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد (FORM)

هدف اساسی در روش اولین مرتبهٔ قابلیت اعتماد تعیین نقطهٔ حداکثر محتمل (U^*) برای تخمین احتمال خرابی است [3, 7]:

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}(U)^2]du = \Phi\left(-\left\|U^*\right\|\right) \quad (۲)$$

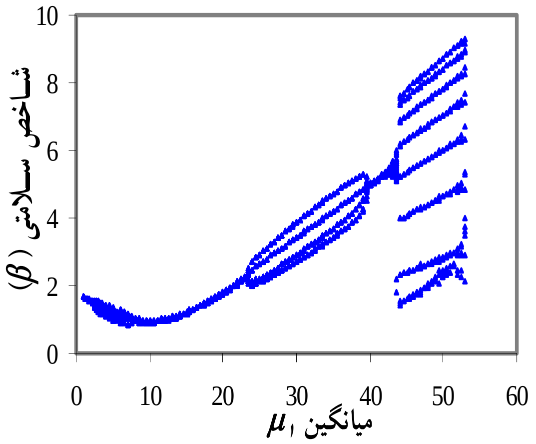
که در آن U متغیر نرمال استاندارد است. رابطهٔ تکرار رویهٔ HL-RF برای محاسبهٔ نقطهٔ حداکثر محتمل به‌صورت زیر است [3]:

$$U_{k+1} = \frac{1}{|\nabla g(U_k)|^2}\left[\nabla^T g(U_k)U_k - g(U_k)\right]\nabla g(U_k) \quad (۳)$$

که در آن $\nabla g(U) = [\partial g/\partial u_1, \partial g/\partial u_2, ..., \partial g/\partial u_n]^T$ بردار گرادیان تابع حالت حدی (Limit state function) در فضای نرمال استاندارد می‌باشد. پاسخ معادلهٔ (۳) در تحلیل مرتبهٔ اول به میانگین (μ) و انحراف معیار (σ) متغیرهای تصادفی وابسته است. همگرایی روش تحلیل مرتبهٔ اول HL-RF (رابطهٔ ۳)، به‌کمک یک تابع غیرخطی به‌صورت زیر بررسی شده است [7, 12]:

$$g_1 = x_1^4 + 2x_2^4 - 20 \quad (۴)$$

که در آن x_1 و x_2 متغیرهای تصادفی نرمال با مقادیر میانگین $\mu_1 = \mu_2 = 10$ و انحراف معیار $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ است. در شکل (۱) قیاسی از همگرایی رویهٔ تکرار HL-RF نسبت به مقدار میانگین متغیر تصادفی x_1 نشان داده شده است. همان‌طوری‌که مشخص است رویه تکرار HL-RF دچار همگرایی به‌صورت نوسانی ($25 < \mu_1 < 40$)، دوشاخه‌ای شدن ($5 < \mu_1 < 25$) و اغتشاش ($\mu_1 > 50$) شده است. از این‌رو، پایداری عددی تکرارهای متوالی رویهٔ HL-RF را می‌توان به‌کمک روش انتقال پایدار بهبود بخشید [7].



شکل ۱ همگرایی نگاشت رویهٔ FORM به‌صورت نوسانی، اغتشاش و دو شاخه‌ای شدن

روش انتقال پایدار (STM)

رویهٔ انتقال پایدار توسط چملچر و دیکونوس در مسائل غیرخطی فیزیکی بیان شد و کاربرد موفقی در الگوریتم‌های تکراری دارد [13]. در رویهٔ STM یک سیستم دینامیکی را می‌توان به‌صورت زیر گسسته‌سازی نمود [7, 14]:

$$r_{k+1} = r_k + \lambda C[f(r_k) - r_k] \quad (۵)$$

که در آن r_{k+1} نقطهٔ گسسته در گام $k+1$ و $f(r_k)$ مقدار تابع می‌باشد. C ماتریس اجباری است که یک ماتریس ثابت و معین است و λ طول گام است که

عددی بین صفر و یک می‌باشد و عمدتاً مقدار آن خیلی کمتر از یک انتخاب می‌گردد. ماتریس اجباری C به‌صورت یک ماتریس متعامد تعریف‌شده است که در هر سطر و ستون این ماتریس فقط عدد ۱ یا ۱- جا داشته باشد و بقیه درایه‌های ماتریس صفر باشد. برای یک سیستم دوبعدی می‌توان ماتریس‌های C را به‌صورت (۶) تعریف نمود.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad C_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۶)$$

حال بااستفاده از این تئوری روش STM برای تخمین احتمال خرابی بیان می‌گردد.

کنترل اغتشاش رویهٔ FORM بااستفاده از روش STM

رابطهٔ تکراری FORM بااستفاده از روش STM را می‌توان مطابق با گسسته‌سازی معادلهٔ (۵)، به‌صورت (۷) باز نویسی نمود [7]:

$$U_{k+1} = U_k + \lambda C\left(f(u_k) - U_k\right) \qquad (۷)$$

که در آن $f(u_k)$ برابر با مقدار بردار طراحی جدید از رویهٔ HL-RF (رابطهٔ ۳) می‌باشد.

$$f(u_k) = \frac{1}{\left|\nabla g(U_k)\right|^2}\left[\nabla^T g(U_k) U_k - g(U_k)\right]\nabla g(U_k) \qquad (۸)$$

این روش اگرچه همگرایی یک مسئلهٔ قابلیت اعتماد را تضمین می‌کند اما دو نقص اساسی دارد:

۱- به‌علت انتخاب ضریب λ بسیار کوچک، همگرایی مسئله با تعداد تکرار بالا صورت می‌پذیرد. از اینرو زمان تحلیل مسئله افزایش می‌یابد و نمی‌تواند یک روش کارا برای مسائل پیچیده باشد.

۲- در برخی مسائل انتخاب نامناسب ماتریس C موجب واگرایی حل می‌شود. به‌عنوان مثال $C = -I$، رابطه تکرار (۷) نقطه‌ای را جستجوی می‌کند که حداکثر فاصله را تا مبدأ دارد.

بهبود روش انتقال پایدار

مطابق با رابطهٔ تکرار معادلهٔ (۷) در روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار مقدار ماتریس C برابر با ماتریس واحد ($C = I$) پیشنهاد شده، لذا داریم که:

$$U_{k+1} = U_k + \lambda_k\left(f(u_k) - U_k\right) \qquad (۹)$$

که در آن، λ_k طول گام دینامیکی است که به‌صورت رابطهٔ (۱۰) پیشنهاد می‌شود.

$$\lambda_k = \frac{\left\|f(u_k) - U_k\right\|}{m\pi\lambda_{k-1}} \qquad (۱۰)$$

که در آن m یک عدد طبیعی و به‌عنوان ضریب طول گام معرفی می‌شود که یک پارامتر کنترل‌کنندهٔ طول گام است. بر این اساس آلگوریتم ارائه‌شده به‌صورت گام‌های زیر قابل تدوین در یک برنامهٔ کامپیوتری است.

۱- حدس مقادیر اولیه $k=0$ و مقادیر اولیه به‌صورت $x_0 = [\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \mu_{x_3}, ..., \mu_{x_n}]^T$ و $\lambda_0 = 1$ و $\varepsilon = 10^{-6}$

۲- محاسبهٔ گرادیان تابع شرایط حدی در نقطهٔ U_k.

۳- محاسبهٔ بردار طراحی جدید مطابق با رابطهٔ (۸)

۴- محاسبهٔ طول گام دینامیکی براساس روابط (۱۰)

۵- محاسبه مقدار بردار طراحی کنترل‌شده براساس رابطهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار (۹).

۶- محاسبه مقدار شاخص قابلیت اعتماد به‌صورت

$$\beta_{k+1} = (U_{k+1}^T \times U_{k+1})^{1/2}$$

۷- کنترل همگرایی مسئلهٔ ($|\beta_{k+1} - \beta_k| \le \varepsilon$) در صورت همگرا شدن توقف رویهٔ تکرار.

۸- تعویض k=k+1 و بازگشت به مرحلهٔ ۲.

بررسی مشکلات همگرایی روش انتقال پایدار

همان‌طور که اشاره شد مشکلات همگرایی روش انتقال پایدار به انتخاب پارامترهای λ و C مرتبط است. در جدول (۱) نتایج همگرایی روش انتقال پایدار نسبت ماتریس‌های اجباری ارائه‌شده در رابطهٔ (۶) برای مثال تابع شرایط حدی رابطهٔ (۴) درج شده است. همان‌طوری‌که مشخص است به‌ازای ماتریس $C = I$ همگرایی حاصل گردیده است و برای سایر ماتریس‌های اجباری همگرایی حاصل نشده است. از این‌رو، فرض $C = I$ در روش بهبود یافته انتقال پایدار (ISTM) مناسب است و منتج به همگرایی رویهٔ STM می‌شود.

در جدول (۲) نتایج همگرایی (تعداد تکرار و شاخص قابلیت اعتماد) مثال رابطهٔ (۴) نسبت به طول گام‌های مختلف روش انتقال پایدار و نیز طول گام دینامیکی روش بهبودیافته ارائه شده است. مشخص است که روش انتقال پایدار برای این مثال در طول گام‌های پایین ($\lambda < 0.1$) همگرایی موفقی دارد اما این همگرایی مستلزم تعداد تکرار بالایی است (به‌ازای طول گام‌های خیلی کوچک مثلاً $\lambda = 0.01$ تعداد تکرار در حدود ۱۴۳۵ می‌باشد). به‌ازای طول گام‌های ۰/۱۵ و ۰/۲ در روش انتقال پایدار همگرایی به‌صورت نوسانی به‌ترتیب برابر (۲/۲۷۷۰۸، ۲/۲۷۶۸۳) و (۲/۱۳۰۹۶، ۲/۱۳۱۹۹) شده است. اما روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار (ISTM) موجب همگرایی با تعداد تکرار بسیار کمتری شده، لذا روش ISTM موجب افزایش کارایی رویهٔ انتقال پایدار شده است.

جدول ۱ مقایسهٔ همگرایی شاخص قابلیت اعتماد مثال ۱ نسبت به ماتریس اجباری رویهٔ STM (ε=10^{-6} , λ=0.05)

ماتریس اجباری	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
β	واگرا	اغتشاش	اغتشاش	واگرا	واگرا	واگرا	واگرا	۲/۳۶۵۴۳۵
تکرار	همگرا نشده است							۳۱۷

جدول۲ مقایسهٔ همگرایی شاخص قابلیت اعتماد مثال ۱ نسبت به طول گام (ε=10^{-6} , $C = I$ و $m = 1$)

طول گام	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	ISTM
β	۲/۳۶۴۴۵۲	۲/۳۶۵۲۵۶	۲/۳۶۵۳۵۳	/۳۶۵۴۳۶ ۲	/۳۶۵۴۴۶ ۲	نوسانی-تناوبی		۲/۳۶۴۸۸۰
تکرار	۱۲۰۵۵	۲۷۳۳	۱۴۳۵	۳۱۷	۱۶۴	همگرا نشده است		۷۹

مثال‌های عددی و مکانیکی

به‌منظور بررسی کارایی و عملکرد روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار از پنج مثال متنوع برگرفته از مراجع استفاده شده است.

مثال۱: تابع غیرخطی. تابع حالت حدی (۱۱) درنظر گرفته شده است [9].

$$g_1 = x_1^4 + 2x_2^4 - 20 \qquad (۱۱)$$

x_1 و x_2 متغیرهای نرمال با میانگین $\mu_1 = \mu_2 = 10$ و انحراف معیار $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ است.

مثال۲: تابع ریاضی بسیار غیرخطی. تابع حالت حدی بسیار غیرخطی به‌صورت رابطهٔ (۱۲) می‌باشد [8]:

$$g_2 = 0.1\ln\{\exp[10(1+x_1-x_2)] + \exp[10(5-5x_1-x_2)]\} \qquad (۱۲)$$

x_1 و x_2 متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند.

مثال ۳: تابع پاسخ غیرخطی و غیرنرمال. این مثال براساس برازش پاسخ سطح مطابق با رابطهٔ (۱۳) پیشنهاد گردیده است [7-9].

$$g_3 = 1.1 - 0.00115x_1x_2 + 0.00157x_2^2 + 0.00117x_1^2 + 0.0135x_2x_3 - 0.0705x_2 - 0.00534x_1 - 0.0149x_1x_3 - 0.0611x_2x_4 + 0.0717x_1x_4 - 0.226x_3 + 0.0333x_3^2 - 0.558x_3x_4 + 0.998x_4 - 1.339x_4^2 \qquad (۱۳)$$

x_1 از تابع توزیع حداکثر نوع II با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۵، متغیرهای x_2 و x_3 از تابع توزیع نرمال به‌ترتیب با میانگین ۲۵ و ۰/۸ و انحراف معیار ۵ و ۰/۲ و متغیر x_4 از تابع لوگ-نرمال با میانگین ۰/۰۶۲۵ و انحراف معیار ۰/۰۶۲۵ پیروی می‌کنند.

مثال۴: سازهٔ مخروطی. تابع شرایط حدی یک دودکش تحت بار محوری P و لنگر خمشی M به‌صورت (۱۴) بیان می‌شود [2, 9]:

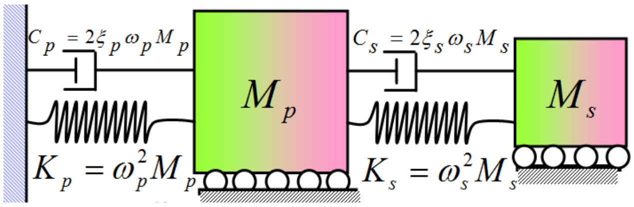
$$g_4 = 1 - \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{\pi E t^2 \cos^2\alpha} \times \left(\frac{P}{2\gamma} + \frac{M}{\eta r_1}\right) \qquad (۱۴)$$

که در آن ضرایب γ و η به‌ترتیب ضریب تطبیق نیروی محوری و لنگر خمشی و برابر با ۰/۳۳ و ۰/۴۱ و v ضریب پواسون برابر با ۰/۳ می‌باشد. این مسئله دارای ۶ متغیر تصادفی نرمال می‌باشد که خصوصیات آماری آنها در جدول (۳) ارائه شده است.

مثال ۵: سیستم دینامیکی دو درجه آزادی. مطابق با سیستم دینامیکی دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل (۲) خواص آن به‌صورت جرم‌های متمرکز M_p و M_s، سختی فنرهای K_p و K_s، فرکانس‌های طبیعی $\omega_p = \sqrt{\frac{K_p}{M_p}}$ و $\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}}$ و ضرایب میرایی ξ_p و ξ_s تعریف می‌گردد.

جدول ۳ خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی مثال ۴

متغیر	E (MPa)	t (m)	α (rad)	r_1 (m)	M (N- m)	P (N)
میانگین	۷۰۰۰۰	۰/۰۰۲۵	۰/۵۲۴	۰/۹	۸۰۰۰۰	۷۰۰۰۰
ضریب تغییرات	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۲۵	۰/۰۸	۰/۰۸



شکل ۲ نمایش سیستم دو درجه آزادی مثال ۵ [3]

جدول ۴ خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی مثال ۵

متغیر	میانگین	انحراف معیار	متغیر	میانگین	انحراف معیار
M_p	۱	۰/۱	ξ_p	۰/۰۵	۰/۰۲
M_s	۰/۰۱	۰/۰۰۱	ξ_s	۰/۰۲	۰/۰۱
K_p	۱	۰/۲	F_s	۱۵	۱/۵
K_s	۰/۰۱	۰/۰۰۲	S_0	۱۰۰	۱۰

تابع شرایط حدی به‌صورت رابطهٔ (۱۵) است [3,15]:

$$g_s = Fs - Ks \times P(E[x_s^2])^{1/2} \qquad (۱۵)$$

که در آن P برابر با ۳ درنظر می‌گیریم و

$$E[x_s^2] = \frac{\pi S_0}{4\xi_s\omega_s}\left[\frac{\xi_a\xi_s}{\xi_p\xi_s(4\xi_a^2+\theta^2)+\gamma\xi_a^2} \times \frac{(\xi_p\omega_p^3+\xi_s\omega_s^3)\omega_p}{4\xi_a\omega_a^4}\right] \qquad (۱۶)$$

که درآن $\gamma = \frac{M_s}{M_p}$ ضریب جرم و $\omega_a = \frac{\omega_p+\omega_s}{2}$ میانگین فرکانسی و $\xi_a = \frac{\xi_p+\xi_s}{2}$ میانگین ضریب میرایی دو سیستم و $\theta = \frac{\omega_p-\omega_s}{\omega_a}$ پارامتر تعدیل است [10, 15]. این مثال شامل ۸ متغیر تصادفی لوگ-نرمال است که خصوصیات آماری آنها در جدول (۴) ارائه شده‌است.

ارزیابی روش ارائه‌شده ISTM

از پنج مثال فوق برای مقایسهٔ صحت همگرایی و تعداد تکرار دو الگوریتم STM و ISTM استفاده شده است. در تحلیل قابلیت اعتماد مطابق با روش پیشنهادی ISTM مقدار ضریب m در رابطهٔ (۱۰) برابر با ۱ و ε=10^{-6} درنظر گرفته شده است.

تعداد تکرار و شاخص قابلیت اعتماد به‌کمک روش انتقال پایدار و روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار در جدول (۵) مقایسه شده است. مشخص است که روش ISTM در تمامی مثال‌ها با تعداد تکرار کمتری نسبت به روش STM همگرا شده است (مثال‌های ۱ و ۲ و ۵). هم‌چنین برای مسائل پیچیده با درجه غیرخطی متوسط، همگرایی بسیار مناسبی از روش ISTM حاصل شده است به‌طوری‌که تعداد تکرار آن نزدیک به نتایج همگرا شدهٔ حداکثر طول گام روش انتقال پایدار می‌باشد (مثال‌های ۳ و ۴). انتخاب دینامیکی طول گام نه‌تنها موجب همگرایی مناسب شده بلکه نیاز به سعی‌وخطا برای تحلیل قابلیت اعتماد پایدار ندارد.

جدول ۵ مقایسهٔ نتایج همگرایی روش انتقال پایدار و بهبودیافتهٔ آن نسبت به طول گام‌های مختلف

مثال‌ها	طول گام	روش STM					روش ISTM
		۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	رابطه (۱۱)
۱#	β	۲/۳۶۵۳۶	۲/۳۶۵۴۵	همگرا شده به‌صورت نوسانی			۲/۳۶۴۸۸
	تکرار	۱۴۳۵	۱۶۴				۷۹
۲#	β	۱/۸۴۵۳۹	همگرایی همراه با اغتشاش				۱/۸۴۲۹۹
	تکرار	۱۰۷۲					۵۸۱
۳#	β	۱/۳۳۰۴۴	۱/۳۳۰۵۳	۱/۳۳۰۵۳	۱/۳۳۰۵۴	۱/۳۳۰۵۴	۱/۳۳۰۱۳
	تکرار	۹۱۱	۱۱۱	۵۷	۲۸	۱۸	۲۳
۴#	β	۴/۷۹۵۴۹	۴/۷۹۵۴۹	۴/۷۹۶۱۹	۴/۷۹۶۸۹	۴/۷۹۶۸۹	۴/۷۹۷۰۸
	تکرار	۸۱۱	۱۴۸	۱۲۲۴	۴۷۲	۲۱	۲۰
۵#	β	۲/۰۱۶۳۴	۲/۰۱۶۴۳	همگرایی	همگرایی همراه با اغتشاش		۲/۰۱۵۶۳
	تکرار	۱۹۷۳	۱۲۰	نوسانی			۸۸

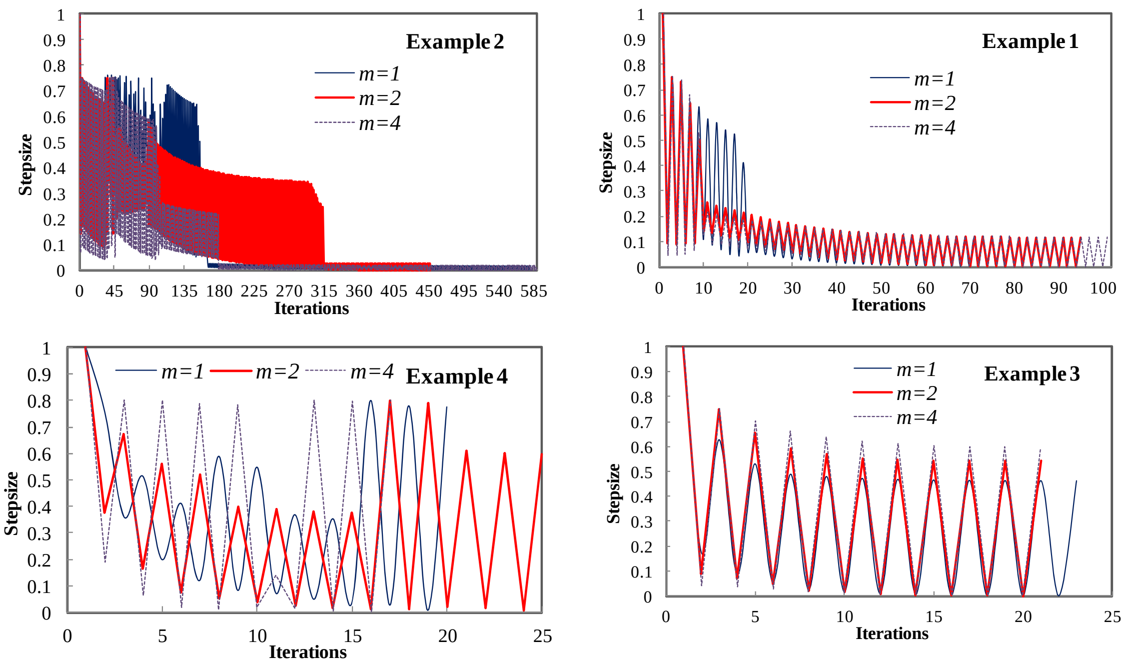
تأثیر ضریب طول گام بر همگرایی روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار

نتایج حاصل طول گام دینامیکی در چندین مثال نسبت بـه ضـریب m در شـکل (۳) نشـان داده شـده اسـت. مشخص است که تغییر ضریب طول گـام (m) ممکـن است تعداد تکـرار را تغییـر دهـد امـا میـزان تغییـرات چندان نبـوده و ایـن طـول گـام در تکرارهـای متـوالی روش ISTM توانـــایی تطبیـــق مناســـب را داراســـت. به‌طوری‌که، در تکرارهای نهایی مقدار طول گام در اکثر ضرایب m، بسیار نزدیک به‌هم شده اسـت. هـم‌چنـین باتوجه به میزان غیرخطی بودن تابع حالت حـدی ایـن ضریب توانایی خود تطبیقـی را دارد. بـه‌طـوری‌کـه در مثال ۱ و ۲ در تکرارهای نهایی بـه‌ترتیـب در محـدودهٔ ۰/۲ تا ۰/۰۵ و ۰/۰۵ تا ۰/۰۱ نوسان می‌کند.

بحث نتایج عددی

نتایج چهار الگوریتم اولین مرتبهٔ قابلیـت اعتمـاد ماننـد روش HL-RF، روش انتقـال پایـدار (STM) [7] (بـا طول گام برابر با ۰/۱)، روش گرادیان مـزدوج [3, 10] و هم‌چنین روش طول گام بی‌نهایت [8] (با طـول گـام برابر با ۱۵) با روش ارائه‌شدهٔ بهبودیافتهٔ انتقـال پایـدار (ISTM) (با طول گام رابطه (۱۰) به ازای m برابر با ۱) مقایسه شده است. در جدول (۶) نتایج شاخص قابلیت اعتماد (β) و تعداد بـرآورد تـابع شـرایط حـدی (Ng) نشان شده است. مشخص است کـه روش HL-RF در ایـن مثـال‌هـا همگـرا نشـده امـا، روش انتقـال پایـدار همگرایی مناسب دارد. از طرفی، روش گرادیان مزدوج مرجـع [۱۰] در مثـال‌هـای بـا درجـهٔ غیرخطـی بـالا (مثال‌هـای ۱ و ۲) همگرایـی مغشـوش داشـته اسـت. روش گرادیـان مـزدوج از روش انتقـال پایـدار کـاراتر است اما در مسائل غیرخطـی توانمنـدی کمتـری دارد. کارایی روش طول گام بی‌نهایت بیشـتر از روش STM می‌باشد، اما توانمندی یکسانی از آنها در ایـن مثـال‌هـا مشاهده شده است. روش STM در توابع حالت حـدی پیچیده نیاز به انتخاب طول گام پایین دارد که ایـن امـر موجب افزایش تعداد تکرار و درنتیجـه افـزایش تعـداد برآورد تابع شرایط حدی می‌شـود (مثـال ۱، ۳ و ۴). از طرفی انتخاب دینامیکی طول گام روش ISTM عـلاوه بر تضمین همگرایی مناسب (مثال ۲) در مواردی تعداد بـرآورد تـابع حالـت حـدی را بـه‌شـدت نسـبت بـه

روش‌های STM و طول گام بی‌نهایت (مثال‌های ۳ و ۴) کاسته است. کارایی روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار مشابه با روش گرادیان مزدوج است و تعداد برآورد در آن مشابه با روش گرادیان مزدوج است، اما در مسائل غیرخطی نسبت به روش گرادیان مزدوج بسیار توانمندتر است.



شکل ۳ تأثیر ضریب طول گام بر همگرایی روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار

جدول ۶ مقایسهٔ شاخص قابلیت اعتماد و تعداد برآورد تابع شرایط حدی روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد

مثال	روش HL-RF β (Ng)	روش STM [7] β (Ng)	روش ارائه شده ISTM β(Ng)	روش طول گام بینهایت [8] β (Ng)	گرادیان مزدوج β (Ng) [3, 10]	نتایج مراجع
۱	نوسانی (۰/۹۲٦۷ ، ۰/۹۸٦۳)	۲/۳٦٥٤٥ (۸۲۰)	۲/۳٦٤۸۸ (۳۹٥)	۲/۳٦٥٤٥٤ (٥٤۰)	همگرایی همراه با اغتشاش	۲/۳۶۵۴[11] ۲/۳٦٥۳۷[9]
۲	نوسانی (۰/۷۰۷۱ ، ۰/۹۸۰٦)	اغتشاش	۱/۸٤۲۹۹ (۲۹۰٥)	نوسانی	همگرایی همراه با اغتشاش	۱/۸٤٥٥[8]
۳	نوسانی (۱/۰٤۹٦ ، ۱/۱٥۳٦)	۱/۳۳۰۵۳ (۹۹۹)	۱/۳۳۰۱۳ (۲۰۷)	۱/۳۳۰٥٤ (۱۹۸)	۱/۳۳۰٥٦ (۳٦۸)	۱/۳۳۰٥[7]، ۱/۳٦[5] ۱/۳۳۰۵۳[8]
٤	حل مغشوش	٤/۷۹٥٤۹ (۱٦۲۸)	٤/۷۹۷۰۸ (۲۳٤)	٤/۷۹٦۸۸ (۳۰٦)	٤/۷۹٦۸٦ (۲٥۲۰)	٤/۸۸۳[2] ٤/۷۹٤۲۹[9]
٥	نوسانی (٤/۲۱۷۱ ، ٤/۹۸۰۷)	۲/۰۱٦٤۳ (۲٥۲۰)	۲/۰۱٥٦۳ (۱٤۹٦)	۲/۰۱٦٤٦ (۱۲۷٥)	۲/۰۱٦٦۲ (۱۳۷۲)	۲/۰۱[14] ۲/۰۱٦٤٥[3]

خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار ارائه شده است. در این الگوریتم اولین مرتبهٔ قابلیت اعتماد، طول گام به‌صورت دینامیکی پیشنهاد شده است. صحت همگرایی، کارایی و توانمندی این روش با چندین مثال بررسی شد که نتایج حاکی از آن است که روش ارائه‌شده، استفادهٔ موفقیت‌آمیزی در مسائل بسیار غیرخطی و پیچیدهٔ مکانیکی و ریاضی دارد.

روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار از توانمندی بسیار بالایی نسبت به روش HL-RF و گرادیان مزدوج برخوردار است و نسبت به روش انتقال پایدار توانمندتر است.

روش ارائه‌شده علاوه بر کارایی به نتایج مشابه با روش‌های اولین مرتبهٔ قابلیت اعتماد همگرا شده است. از این‌رو این روش نه‌تنها همگرایی مناسب تحلیل مرتبه اول قابلیت اعتماد سازه‌ها را تضمین می‌کند بلکه از روش انتقال پایدار و طول گام بی‌نهایت نیز کاراتر است.

مراجع

1. Hasofer, A.M. and Lind, N.C., "Exact and invariant second moment code format", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 111, No. 21, pp. 111-121, (1974).
2. Elegbede. C., "Structural reliability assessment based on particles swarm optimization", *Structural Safety*, Vol. 27, No. 2, pp. 171–186, (2005).
3. Keshtegar, B. and Miri, M., "Introducing Conjugate gradient optimization for modified HL-RF method", *Engineering Computations*, Vol. 31, No. 4, pp. 775-790, (2014).
4. Rackwitz, R. and Fiessler, B., "Structural reliability under combined load sequences", *Computers and Structures*, Vol. 9, No. 8, pp. 489-494, (1978).
5. Liu, P.L. and Kiureghian, A.D., "Optimization algorithms for structural reliability", *Structural Safety*, Vol. 9, No. 3, pp. 161-178, (1991).
6. Santosh. T. V., Saraf. R.K., Ghosh. A.K. and Kushwaha. H.S., "Optimum step length selection rule in modified HL-RF method for structural reliability", *International Journal of Pressure Vessels Piping*, Vol. 83, No. 10, pp. 742–748, (2006).
7. Yang, D., "Chaos control for numerical instability of first order reliability method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 5, No. 10, pp. 3131-3141, (2010).
8. Gong, J.X. and Yi, P., "A robust iterative algorithm for structural reliability analysis", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 43, No. 4, pp. 519–527, (2011).
9. Keshtegar, B. and Miri, M., "An enhanced HL-RF Method for the computation of structural failure probability based on relaxed approach", *Civil Engineering Infrastructures*, Vol. 1, No. 1, pp. 69-80, (2013).

۱۰. کشته‌گر، بهروز، میری، محمود، «ارائهٔ روشی جدید برای ارزیابی قابلیت اعتماد سازه‌ها»، *مجلهٔ مدل‌سازی در مهندسی*، سال ۱۲، شمارهٔ ۳۶، صص ۴۲–۲۹، (۱۳۹۳).

11. Yang, D., Li, G. and Cheng, G., "Convergence analysis of first order reliability method using chaos theory", Computers and Structures, Vol. 84, Vol. 8-9, pp. 563–571, (2006).
12. Wang, L.P. and Grandhi, R.V., "Efficient safety index calculation for structural reliability analysis", *Computers and Structures*, Vol. 52, No. 1, pp. 103–111, (1994).
13. Schmelcher, P. and Diakonos, F.K., "General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems", *Physical Review Letters*, Vol. 57, No.1, pp. 2739-2754, (1998).
14. Yang, D.X. and Yi, P., "Chaos control of performance measure approach for evaluation of probabilistic constraints", *Structure Multidisciplinary Optimization*, Vol. 38, No. 1, pp. 83-92, (2009).
15. Kiureghian, A.D. and Stefano, M.D., "Efficient algorithm for second-order reliability analysis", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, No. 12, pp. 2904-2923, (1991).